數學傳播　49卷2期, pp. 54-62

2025年第14屆歐洲女子數學奧林匹亞競賽試題解答

教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組

2025 年第 14 屆歐洲女子數學奧林匹亞競賽 (Euporean Girls' Mathematical Olympiad, 簡稱 EGMO) 在科索沃普利斯提納 (Prishtina, Kosovo) 舉行。本屆共有 55 個國家與會、合計 219 位女學生代表參賽。我國是第二次正式參賽, 獲得一金兩銀一銅的成績, 表現優異。競賽內容與國際數學奧林匹亞競賽 (International Mathematical Olympiad) 相仿, 由試題委員會在代數、組合、幾何、數論等領域中挑選六道試題, 供領隊會議確認成爲正式考題, 以兩天每天 3 道試題、4 小時又 30 分鐘的形式由選手作答。

本屆的六道試題, 第一題屬數論, 第二、六題爲代數, 第三、四題爲幾何, 第五題爲組合。本文提供我國代表團所翻譯成正體中文版的六道 EGMO 試題以及官方釋出的參考解答, 作爲國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考之用。

問題一: 對於正整數 N, 設 $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ 爲所有小於 N 並與 N 互質的正整數。找到所有滿足下列條件的 $N \geq 3$: 對於所有 $1 \leq i \leq m-1$ 都有

$$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1.$$

其中 $\gcd(a,b)$ 定義爲能夠同時整除 a 和 b 的最大正整數。而當 $\gcd(a,b)=1$ 時, 則稱整數 a 和 b 互質。

試題委員會公布的參考答案:

滿足題意的 N 爲所有 (大於 2) 的偶數, 以及 3 的冪次。

我們首先證明這兩類數皆滿足題意。

- 若 N 爲偶數, 則所有的 c_i 都會是奇數。因爲兩奇數之和爲偶數, 所以對所有 i 都有 $\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \geq 2$。
- 若 N 爲 3 的冪次, 則這些 c_i 會是 1 到 $N-1$ 中所有不被 3 整除的數。將這些數由小到大排列後, 它們除以 3 的餘數會依序爲 1, 2, 1, 2, …, 1, 2。因此 $\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \geq 3$。

以下證明其他正整數皆不滿足題意。由上討論, 可設 $N = 3^n \cdot k$, 其中 n 爲非負整數, k 爲大於或等於 5 的奇數, 且k 的最小質因數至少是 5。若 N 也不是 3 的倍數 (即 $n = 0$), 則有 $\gcd(N, 6) = 1$, 所以 $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, 得 $\gcd(N, c_i + c_{i+1}) = \gcd(N, 3) = 1$, 不合。

當 $N = 3^n \cdot k$ 爲 3 的倍數 (即 $n \geq 1$) 時, 可再分爲下列兩種情況:

- $k \equiv 1 \pmod 3$。此時 $k - 1$ 是 3 的倍數, k 是 k 的倍數, 此二數都不與 N 互質。但 $k - 2$, $k + 1$ 除以 3 的餘數都是 2, 皆不被 3 整除; 同時由於 k 是奇數, 所以 $\gcd(k - 2, k) = \gcd(-2, k) = 1$, $\gcd(k + 1, k) = \gcd(1, k) = 1$。因此存在某個足標 i 使得 $c_i = k - 2$, $c_{i+1} = k + 1$。此時 $c_i + c_{i+1} = 2k - 1$。注意到 $2k - 1 \equiv 1 \pmod 3$, $\gcd(k, 2k - 1) = \gcd(k, -1) = 1$, 故 $\gcd(N, 2k - 1) = 1$, 不合題意。
- $k \equiv 2 \pmod 3$。此情形與前一狀況類似, 但考慮的是連續兩個與 N 互質的正整數 $c_i = k - 1$, $c_{i+1} = k + 2$。此時 $c_i + c_{i+1} = 2k + 1$, 而 $\gcd(N, 2k + 1) = \gcd(3^n, 2k + 1) \cdot \gcd(k, 2k + 1) = 1$, 亦不合題意。

證明至此完成。 □

評註: 本題是相當容易的數論題, 範圍不超過國中課綱。只要從小的例子開始嘗試, 慢慢發現規律, 即可求證。本題非常適合作爲競賽入門的問題, 也可以納入一般教學探索活動。

問題二: 對於一個無窮遞增的正整數列 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, 如果對於每個正整數 n, 該數列的前 a_n 項的算術平均數恰等於 a_n 的值, 則我們稱這個數列是*中立的*。

證明存在一個無窮正整數列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$, 使得對於每一個中立數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$, 都存在無窮多個正整數 n 滿足 $a_n = b_n$。

試題委員會公布的參考答案:

我們宣稱數列 $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ (即 $b_i = 2i - 1$, $i \in \mathbb{N}$) 滿足題意。以下使用歸謬證法, 即假設中立數列 $\langle a_i \rangle$ 中只有有限多項 a_i 滿足 $a_i = 2i - 1$ 來得到矛盾。

記 $S(n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$。依題設有 $S(a_n) = a_n^2$ 及 $S(a_{n+1}) = a_{n+1}^2$。若 $a_{n+1} = a_n + 1$, 則

$$a_{a_n+1} = S(a_{n+1}) - S(a_n) = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_n + 1)^2 - a_n^2 = 2a_n + 1 = 2a_{n+1} - 1.$$

由歸謬假設知道這只能發生有限多次。因此對於足夠大的 n, 都有 $a_{n+1} \geq a_n + 2$。

對足夠大的 n, 若 $a_n > 2n - 1$, 則 $a_{n+1} \geq a_n + 2 > 2n - 1 + 2 = 2(n + 1) - 1$。於是我們可將討論分成兩種情況:

(A) 對某個足夠大的 n 有 $a_n > 2n - 1$。此時, 存在 n_A 使得 $a_n > 2n - 1$ 對所有 $n \geq n_A$ 均成立。

(B) 存在 n_B 滿足 $a_n < 2n - 1$ 對所有 $n \geq n_B$ 均成立。

在情況 (A) 之中, 可知對 $m > N_A$ 有

$$\begin{aligned} S(m) &= S(N_A) + \sum_{i=N_A+1}^{m} a_i \geq S(N_A) + \sum_{i=N_A+1}^{m} 2i \\ &= S(N_A) + m(m+1) - N_A(N_A+1) \\ &= m^2 + m + S(N_A) - N_A(N_A+1). \end{aligned}$$

當 m 足夠大時 (例如 $m > N_A(N_A+1)$), 上式必大於 m^2, 故與 $S(a_n) = a_n^2$ 總是成立的題設不合。

同理, 在情況 (B) 之中, 可知對 $m > N_B$ 有

$$\begin{aligned} S(m) &= S(N_B) + \sum_{i=N_B+1}^{m} a_i \leq S(N_B) + \sum_{i=N_B+1}^{m} 2(i-1) \\ &= S(N_B) + m(m-1) - N_B(N_B-1) \\ &= m^2 - m + S(N_B) - N_B(N_B-1). \end{aligned}$$

當 m 足夠大時 (例如 $m > S(N_B)$), 上式必小於 m^2, 故與 $S(a_n) = a_n^2$ 總是成立的題設不合。

至此證明完畢。 □

評註: 本題屬於難度中等的代數題。稍加計算即可得到作爲標準的中立數列。但要證明其他中立數列與此數列有無窮多項相同, 就需仔細觀察數列各項之間的變化, 從而寫下有效的不等式, 來證出命題。本題也可以用數學歸納法處理, 請讀者嘗試看看。

問題三: 設 ABC 爲銳角三角形。點 B, D, E, C 依序落在一條直線上且滿足 $BD = DE = EC$。設 M 和 N 分別爲 AD 和 AE 的中點。假設 ADE 爲銳角三角形且令 H 爲其垂心。設 P 和 Q 分別落在直線 BM 和 CN 上, 使得 D, H, M, P 兩兩相異且四點共圓, 以及 E, H, N, Q 兩兩相異且四點共圓。證明 P, Q, N, M 共圓。
三角形的垂心指的是其三條高的交點。

試題委員會公布的參考答案:

令 B' 爲 B 對 M 的對稱點, C' 爲 C 對 N 的對稱點。易知 C', A, B' 三點共線, 以及 $DEB'A$ 爲平行四邊形。由於 $EH \perp AD$, 得 $EH \perp EB'$。同時亦有 $HA \perp AB'$, 故 H, E, B', A 四點共圓。由此知

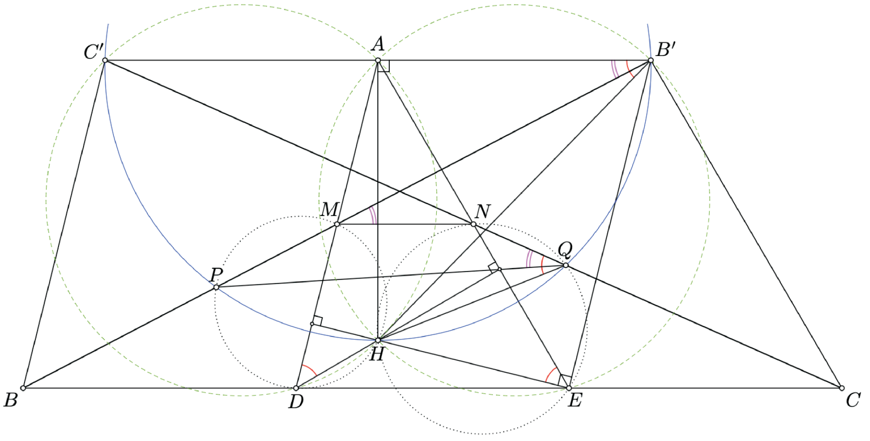
$$\angle C'QH = \angle NQH = \angle NEH = \angle AEH = \angle AB'H = \angle C'B'H.$$

所以 C', B', Q, H 四點共圓。同理可得 C', B', P, H 共圓, 故 B', C', P, Q, H 五點同時在一

圓上。現在計算角度得

$$\angle NMB' = \angle AB'M = \angle C'B'P = \angle C'QP = \angle NQP,$$

故 P, Q, N, M 四點共圓。證明完畢。 □



評註: 本題是中等偏難的幾何題。會注記垂心的定義, 是因爲垂心的定義不見得在各國的中學課綱範圍內。題目的難處在於畫出有用的輔助點, 藉以轉移有效的幾何性質。另外本題亦可以由 $\triangle ADE$ 爲主的重心坐標來計算出共圓的結論, 唯一較爲困難的是垂心 H 的坐標, 接下來的計算應可在正常時限內完成。

問題四: $\triangle ABC$ 是一個銳角三角形, 滿足 $AB \neq AC$ 且內心爲 I。直線 BI 與 CI 分別交 ABC 的外接圓於 $P \neq B$ 和 $Q \neq C$。做 R, S 滿足 $AQRB$ 和 $ACSP$ 爲平行四邊形 (其中 $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$, $AP \parallel CS$)。令 T 爲直線 RB 和 SC 的交點, 證明 R, S, T, I 共圓。

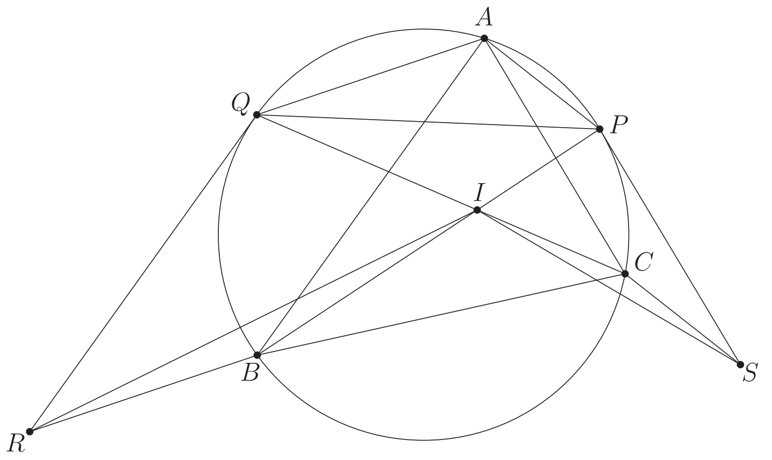
試題委員會公布的參考答案:

引理 1: $\angle RBI = \angle SCI$。

證: 使用有向角:

$$\begin{aligned}\measuredangle(BR, BI) &= \measuredangle(BR, AB) + \measuredangle(AB, BI)\\ &= \measuredangle(AQ, AB) + \measuredangle(BI, BC) = \measuredangle(CQ, BC) + \measuredangle(BI, BC)\\ &= \measuredangle(CI, CB) + \measuredangle(BI, BC).\end{aligned}$$

注意到上式對 B, C 是對稱的。故亦有 $\measuredangle(CS, CI) = \measuredangle(CI, CB) + \measuredangle(BI, BC)$。



引理 2: $BR/BI = CS/CI$。

證: 易知 $BR = AQ$ 以及 $CS = AP$。計算角度可得 $\angle ICB = \angle QCB = \angle APQ$, 同理得 $\angle PQA = \angle CBI$。故 $\triangle IBC \sim \triangle AQP$, 由此得 $AQ/BI = AP/CI$, 即 $BR/BI = CS/CI$。

現由引理 1, 2 可知 $\triangle BIR \sim \triangle CIS$ (SAS), 故得 $\angle TRI = \angle BRI = \angle CSI = \angle TSI$, 推得 R, S, T, I 四點共圓。證明完畢。 □

評註: 本題是簡單的幾何題。本題所有相關的幾何物件都已在題目中出現, 因此只要能夠把握關鍵性質, 即可求證。如果不用有向角處理的話, 就須注意點的相關位置, 證明要更小心一些。

問題五: 令 $n > 1$ 爲一正整數。在一個 $n \times n$ 的方格表中, n^2 個方格每個都包含一個箭頭, 指向上、下、左、右其中一個方向, 稱這樣包含箭頭的方格表爲一個*配置*。

給定一個方格表的初始配置, 一隻蝸牛小蝸會從一個方格開始, 在方格表上移動。在小蝸的每次移動中, 他會從所在方格沿著箭頭方向前進一格 (有可能會離開方格表)。每次移動結束後, 方格表上的所有箭頭都會逆時針旋轉 90°。我們稱一個方格是*包好的*, 如果小蝸從這個方格開始按上述方式移動, 可以經過所有的方格恰好一次, 不走出棋盤並回到出發的方格。

對於所有 n, 試求在所有可能的初始配置中, 最多能有幾個包好的方格。

試題委員會公布的參考答案:

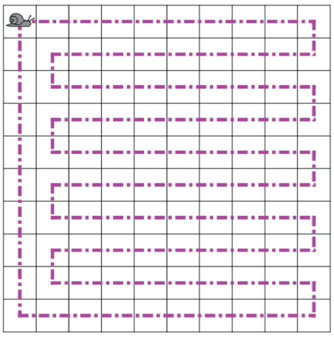
當 n 爲奇數時, 答案爲 0; 但當 n 爲偶數時, 答案爲 $\dfrac{n^2}{4}$。

我們首先處理 n 爲奇數的情況。將方格黑白相間塗色, 可知小蝸的路徑上方格的顏色也是黑白相間, 所以小蝸如果能夠走一圈回到起點的話, 黑白格數量必須相等。但當 n 爲奇數時, 全部共有奇數個方格, 故黑白格數不可能一樣。所以當 n 爲奇數時, 方格表內沒有任何包好的方

格。

以下只考慮 n 爲偶數的情況。先給一個有 $\dfrac{n^2}{4}$ 個包好的方格的初始配置。令 (i,j) 代表第 i 列、第 j 行的方格。考慮以下迴圈:

$$\begin{aligned}(1,1) &\to (1,2) \to (1,3) \to \cdots \to (1,n)\\ &\to (2,n) \to (2,n-1) \to \cdots \to (2,2)\\ &\ \ \vdots\\ &\to (2i-1,2) \to (2i-1,3) \to \cdots \to (2i-1,n)\\ &\to (2i,n) \to (2i,n-1) \to \cdots \to (2i,2)\\ &\ \ \vdots\\ &\to (n,n) \to (n,n-1) \to \cdots \to (n,2)\\ &\to (n,1) \to (n-1,1) \to \cdots \to (2,1) \to (1,1).\end{aligned}$$



注意到上面的迴圈會到達每一方格恰好一次, 再回到出發的方格。要證明 $(1,1)$ 是包好的方格, 我們需要找出讓小蝸按此路徑行進的初始配置。

設 c_i 爲迴圈上的第 $(i-1)$ 個方格: 即 $c_0=(1,1)$、$c_2=(1,2)$、$\cdots$、$c_{n^2-1}=(2,1)$。對於每個 i, 我們在方格 c_i 畫上一支箭頭, 指向方格 c_{i+1} (若 $i=n^2-1$ 則指向 c_0), 然後將這支箭頭順時針旋轉 i 次 $90°$。在移動了 i 步之後, c_i 上的箭頭會逆時針旋轉 i 次 $90°$, 並且會與上述路徑上的方向一致。因此, 小蝸依序走過迴圈 $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n^2-1}, c_0$, 而 $(1,1)$ 就是一個包好的方格。

每走四步, 所有箭頭都會回到最初的方向。此外, 當走完整個迴圈後, 棋盤會回到初始配置, 因爲迴圈長度 n^2 可以被 4 整除。因此, 小蝸也可以從任何 c_i (其中 i 爲 4 的倍數) 出發, 並沿著同樣的路徑行走。因此, 方格 $c_0, c_4, c_8, \ldots, c_{n^2-4}$ 都是包好的方格, 總共有 $\frac{n^2}{4}$ 個這樣的方格。

接下來證明對於任意偶數 n 及在任意初始配置下, 最多只有 $\frac{n^2}{4}$ 個包好的方格。

設 a_0 爲一個包好的方格。令 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2-1}, a_{n^2}=a_0$ 爲小蝸從 a_0 出發所經過的方格序列。現在假設還有另一個包好的方格 b_0, 並令 $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n^2-1}, b_{n^2}=b_0$ 爲小蝸從 b_0 出發所經過的方格序列。

注意, 因爲 $4 \mid n^2$, 所以經過 n^2 步後, 箭頭會回到最初的配置。因此, 如果小蝸每次回到起始格子後繼續行走, 她只會不斷重複同一個循環。

考慮棋盤的左上角。以標準的行列編號, 左上角方格爲 $(1,1)$。這個方格只有兩個鄰居, 所以 a-路徑和 b-路徑必須包含 $(2,1)$、$(1,1)$、$(1,2)$ 這三個方格, 順序可以是 $(2,1)$、$(1,1)$、$(1,2)$ 或 $(1,2)$、$(1,1)$、$(2,1)$。不失一般性, 設 $a_{i-1}=(2,1)$、$a_i=(1,1)$、$a_{i+1}=(1,2)$ 對某個 i 成立。設足標 j 滿足 $b_j=(1,1)$。如果 $b_{j-1}=(2,1)=a_{i-1}$, 那麼 $(2,1)$ 方格的箭頭

在經過 $i-1$ 步和 $j-1$ 步後必須指向同一方向, 所以 $i \equiv j \pmod 4$。但此時 $(1,1)$ 格子的箭頭也必須在經過 i 和 j 步後指向同一方向, 因此小蝸會在兩種情況下都移動到 $b_{j+1} = a_{i+1}$, 並且再次發現箭頭方向相同。繼續下去, 我們會發現 b-路徑其實和 a-路徑完全相同, 只是起點不同, 因爲任何其他起點都會導致箭頭初始方向錯誤。

現在假設 $b_{j+1} = (2,1) = a_{i-1}$。考慮 a-路徑, 經過 $i-1$ 步後左上角的箭頭必須如下圖所示:

$\downarrow$	$\leftarrow$	
$\uparrow$		

或

$\downarrow$	$\uparrow$	
$\uparrow$		

考慮 b-路徑, 經過 $j-1$ 步後箭頭必須如下圖所示:

$\leftarrow$	$\leftarrow$	
$\uparrow$		

或

$\leftarrow$	$\leftarrow$	
$\leftarrow$		

從格子 $(1,1)$ 的箭頭我們可以看出 $i \equiv j+1 \pmod 4$。然而, 對於格子 $(2,1)$ 和 $(1,2)$ 來說, 這會導致矛盾。

我們因此得出結論, 唯一可能的包好方格是 a_{4t}, 其中 $t = 0, 1, \ldots, \dfrac{n^2}{4} - 1$, 這表示最多有 $\dfrac{n^2}{4}$ 個包好的方格。證明完畢。 $\square$

評註: 在連續三年的國際數學競賽中, 都出現了小蝸這號人物, 足見數學題目的敘述, 不見得總是冷冰冰的。本題是中等難度的組合題, 首先用到圖論中的漢米爾頓迴圈 (Hamilton cycle) 的概念, 然後在迴圈存在的情況下, 建構並論證有效的包好方格數量。其中當 n 爲偶數時, 迴圈的長度是 4 的倍數, 因此小蝸走一圈回來的時候, 地上的箭頭方向與出發時有相同的性質, 在證明中至爲重要。但因爲這個性質相當明顯, 許多選手都忽略了, 成爲失分的關鍵, 相當可惜。

問題六: 在 2025×2025 方格表的每個方格中都有一個非負實數。這些數字滿足每一橫列的總和都是 1, 且每一直行的總和都是 1。定義 r_i 爲第 i 橫列方格數字的最大值, 並定義 $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$。類似地, 定義 c_i 爲第 i 直行方格數字的最大值, 並定義 $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$。

請問 $\frac{R}{C}$ 的最大可能值是多少?

試題委員會公布的參考答案:

答案是 $\dfrac{2025}{89}$。一般而言, 若方格表的大小爲 $n\times n$, 其中 $n=m^2$, 則答案爲 $\dfrac{n}{2\sqrt{n}-1}=\dfrac{m^2}{2m-1}$。

令 (i,j) 代表第 i 列、第 j 行的格子, 而 $a_{i,j}$ 代表在 (i,j) 格中填入的非負實數。以下對一般的正整數 m 給出達到 $\frac{R}{C}=\frac{m^2}{2m-1}$ 的建構:

$$a_{i,j}=\begin{cases}\frac{1}{m}, & 1\le i\le m,\ j\equiv i \pmod m;\\ 0, & 1\le i\le m,\ j\not\equiv i \pmod m;\\ \frac{1}{m^2}, & m+1\le i\le m^2.\end{cases}$$

此時 $R=m^2\cdot\frac{1}{m}=m$, 而 $C=m\cdot\frac{1}{m}+(m^2-m)\cdot\frac{1}{m^2}=2-\frac{1}{m}$, 得 $\frac{R}{C}=\frac{m}{2-1/m}=\frac{m^2}{2m-1}$。

以下證明在方格表的大小爲 $m^2\times m^2$ 時, $\frac{R}{C}$ 必不大於 $\frac{m^2}{2m-1}$。

將每一列中出現最大數字的其中一格塗成紅色。因爲行跟行、列跟列之間的對調不影響 R,C 之值, 故不失一般性我們可以假設這些紅色格出現在最左邊的 k 行, 並且這 k 行中的每一行至少都有一個紅色格。對於 $1\le j\le k$, 令 n_j 與 p_j 分別代表在第 j 行中紅色格的數量與它們裡面的數字和。注意到: 當 $1\le j\le k$ 時, 第 j 行的最大數字 c_j 至少是 $\frac{p_j}{n_j}$; 而其他行的最大數字至少是 $\frac{1}{n}$, 因爲各行的數字和爲 1。因此

$$C\ge\frac{p_1}{n_1}+\frac{p_2}{n_2}+\cdots+\frac{p_k}{n_k}+\frac{n-k}{n}.$$

而 $R=p_1+p_2+\cdots+p_n$。

由此考慮, 可知我們證明的目標是

$$p_1+p_2+\cdots+p_n\le\frac{n}{2\sqrt{n}-1}\left(\frac{p_1}{n_1}+\frac{p_2}{n_2}+\cdots+\frac{p_k}{n_k}+\frac{n-k}{n}\right). \tag{1}$$

由上定義, 有 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$; 並且因爲填入方格的都是非負實數, 所以 $p_j\le 1$ 對每個 j 均成立。還有, 因爲每個紅色格中的數字至少是 $\frac{1}{n}$, 所以有 $p_j\ge\frac{n_j}{n}$。

由於不等式 (1) 對每一個變數 $p_1,\ldots,p_k$ 是線性的, 所以只需證明此式在這些變數的兩個極端值皆成立即可。再次重排後, 可設 $p_j=\frac{n_j}{n}$ 對 $1\le j\le t$ 成立, 而 $p_j=1$ 對 $t+1\le j\le k$ 成立, 其中 $0\le t\le k$。

首先, 若 $t=k$, 則有 $p_1+p_2+\cdots+p_k=\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}+\cdots+\frac{n_k}{n}=1$, 且 $\frac{p_1}{n_1}+\frac{p_2}{n_2}+\cdots+\frac{p_k}{n_k}=\frac{k}{n}$。此時不等式 (1) 變成 $1\le\frac{n}{2\sqrt{n}-1}$, 這顯然對每個正整數 n 均成立。

故以下均假設 $t<k$。我們要證的是

$$\frac{n_1+\cdots+n_t}{n}+k-t\le\frac{n}{2\sqrt{n}-1}\left(\frac{t}{n}+\frac{1}{n_{t+1}}+\cdots+\frac{1}{n_k}+\frac{n-k}{n}\right).$$

由柯西不等式知

$$\frac{1}{n_{t+1}}+\cdots+\frac{1}{n_k}\geq\frac{(k-t)^2}{n_{t+1}+\cdots+n_k}=\frac{(k-t)^2}{n-(n_1+\cdots+n_t)}.$$

設 $n_1+\cdots+n_t=n\cdot q$, 其中 $0\leq q<1$。我們只需證明下面這個更充分的不等式:

$$q+k-t\leq\frac{n}{2\sqrt{n}-1}\left(\frac{t}{n}+\frac{(k-t)^2}{n-nq}+\frac{n-k}{n}\right). \tag{2}$$

令 $k-t=\ell\geq 1$。(2) 式成為

$$q+\ell\leq\frac{1}{2\sqrt{n}-1}\left(n-\ell+\frac{\ell^2}{1-q}\right).$$

重新整理後等價於下式:

$$n+q+\frac{\ell}{1-q}\geq 2(q+\ell)\sqrt{n}. \tag{3}$$

當 $q=0$ 上式可由算幾不等式立即得到。而當 $0<q<1$ 時, 由柯西不等式知

$$q+\frac{\ell^2}{1-q}=\frac{q^2}{q}+\frac{\ell^2}{1-q}\geq(q+\ell)^2. \tag{4}$$

因為由算幾不等式可知 $n+(q+\ell)^2\geq 2(q+\ell)\sqrt{n}$, 代入 (4) 式即得 (3) 式。證明完畢。 □

評註: 本題屬代數題, 是本屆賽事中最難的問題, 全場只有兩人完全答對。這個問題 ($\frac{R}{C}$ 的最大值) 在組合設計與資訊科學中是自然的問題, 作為數學問題饒富趣味。本題的關鍵在於利用 2025 是平方數的性質, 建構中得到最大值的情況; 再巧妙地利用不等式證明答案確為上界。大部分的考生未能想像出得到最大值的表格狀況, 自然沒有可能證明結論。初始有效情形是 4×4 的表格, 可以嘗試看看。也可以試試邊長不為平方數的情況。

—本工作小組係由教育部委託國立台灣師範大學, 於「中華民國參加 2025 年第 37 屆亞太數學、第 14 屆歐洲女子數學及第 66 屆國際數學奧林匹亞競賽計畫」下成立。本文的主要作者為林延輯副教授, 任教於國立台灣師範大學數學系。—